b- Calculer $\int_1^n \left(1 + \frac{\text{Logt}}{t}\right)dt$ puis montrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 5$, $n \leq w_n \leq n\text{Logn}$.

c- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/a- $(2i)^3 + (3 - d^2)(2i) + 2i(1 + d^2)$
$= -8i + 6i - 2id^2 + 2i + 2id^2$
$= 0 \quad \Rightarrow$ 2i est une solution de E_d.

b- Soit le polynome $f_d(z) = z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2)$
2i est une solution de $E_d \Leftrightarrow$ 2i est une solution de $f_d(z) = 0$
$\Rightarrow$ il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ /
• $f_d(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c); \forall z \in \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow f_d(z) = az^3 + bz^2 + zc - 2iaz^2 - 2ibz - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow f_d(z) = az^3 + (-2ia + b)z^2 + (-2ib + c)z - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -2ia + b = 0 \\ -2ib + c = 3 - d^2 \\ -2ic = 2i(1 + d^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2i \\ c = -1 - d^2 \end{cases}$$

Ainsi $f_d(z) = (z - 2i)(z^2 + 2iz - 1 - d^2); \forall z \in \mathbb{C}$.

$E_d : z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0 \Leftrightarrow f_d(z) = 0$
$\Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 + 2iz - 1 - d^2 = 0 \quad (\Delta' = (i)^2 - (-1 - d^2) = d^2)$
$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -i - d$ ou $z = -i + d$.
Conclusion : les solutions de E_d sont : 2i , $-i + d$ et $-i - d$.

2/a- $MN = |-i - d + i - d| = |-2d| = 2|d| = 4$ car $|d| = 2$.
• $\text{aff}(M * N) = \frac{-i + d + (-i - d)}{2} = -i = \text{aff}(B)$
$\Rightarrow B = M * N$

b- MN=4 et B=M*N donnent BM=BN=2
signifie que M et N sont sur le cercle de centre B et de rayon 2.

c- Soit G le centre de gravité de AMN. On a donc
$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} = \vec{O} \Leftrightarrow \text{aff}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG}\right) = \text{aff}\left(\vec{O}\right)$